

TI-*n*spire CX CAS TI-*n*spire CX II-T CAS



Kompaktwissen

Analysis

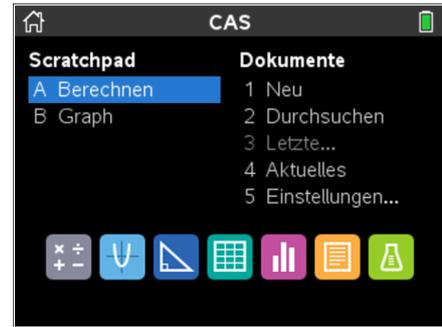
Eine kleine Hilfe für Schüler der ISH



Diese Anleitung soll helfen, Aufgaben aus dem Mathematikunterricht mithilfe des TI-nspire CAS zu lösen. Sie ist – wie der Taschenrechner selbst – nur ein Hilfsmittel.

Die Problemstellungen und dazugehörigen Lösungsstrategien müssen aus dem Mathematikunterricht bekannt sein.

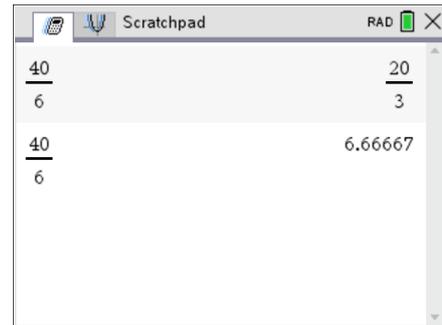
Bitte den Rechner einschalten. Los geht's ...



Berechnungen im Scratchpad durchführen

- \square on **A** drücken
- Term eingeben, z.B. \square 4 \square 0 \square \div \square 6
- \square enter drücken

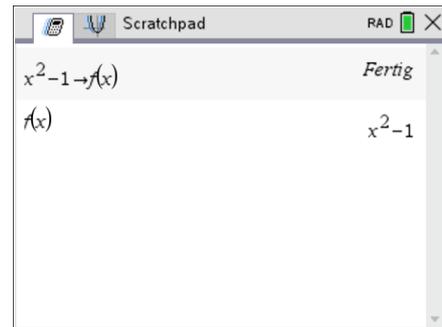
Zur Umwandlung des Ergebnisses in eine Dezimalzahl muss eventuell noch \square ctrl \square enter gedrückt werden.



Funktionen im Scratchpad definieren

- \square on **A** drücken
- gewünschte Funktion eingeben, z.B. \square x \square ^ \square 2 \square - \square 1
- \square ctrl und \square var für [sto \rightarrow] drücken
- Namen und Variable festlegen, z.B. \square F \square (\square X
- \square enter drücken

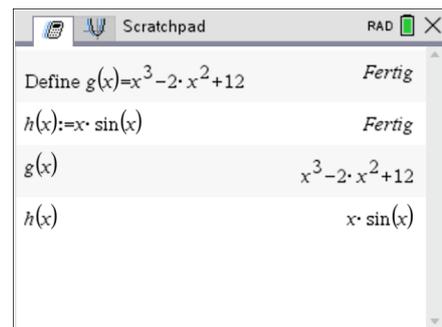
Die Funktionsdefinition sollte sofort durch Aufrufen der Funktion überprüft werden, z.B. \square F \square (\square X \square enter.



Funktionen im Scratchpad definieren – Alternativen

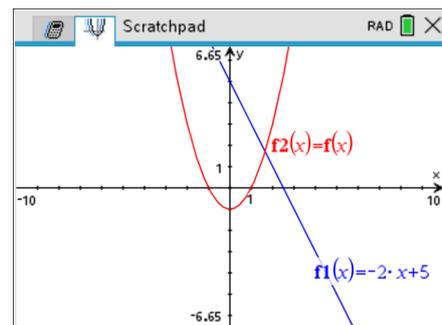
Funktionen lassen sich auch mithilfe des Define-Befehls (\square menu \square 1 \square 1) oder mit \square ctrl und \square [:=] für [=] definieren.

Funktionen dürfen auch $f1(x)$, $f2(x)$, $a(b)$, $s(t)$, ... heißen.



Funktionen im Grafikfenster des Scratchpad zeichnen

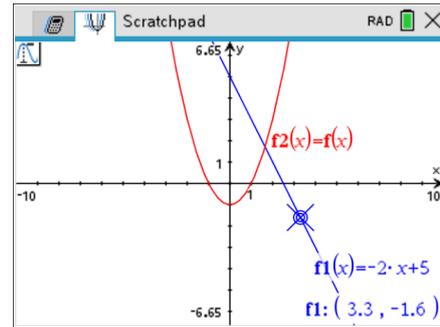
- \square on **B** drücken
- Funktion eingeben, z.B. \square (-) \square 2 \square x \square + \square 5
- \square enter drücken und/oder
- Bereits definierte Funktion mit Namen und Argument eingeben, z.B. \square F \square (\square X
- \square enter drücken



Funktionswerte im Spurmodus ermitteln

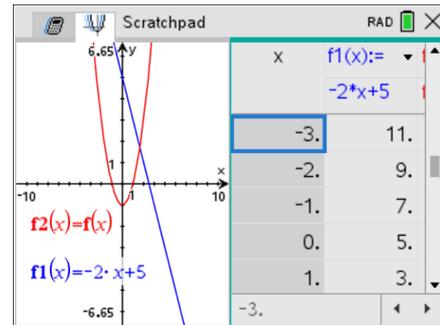
- **menu** **5** **1** für „Grafikspur“ drücken
- Gewünschte Funktion mit Cursortasten **▲▼** auswählen
- Gewünschte Stelle x mit Cursortasten **◀▶** auswählen und Koordinaten des Punktes ablesen *oder*
- Gewünschte Stelle x direkt eingeben und **enter** drücken

Bei dieser Methode passt sich der Zoombereich des Fenster an, es kann unübersichtlich werden.

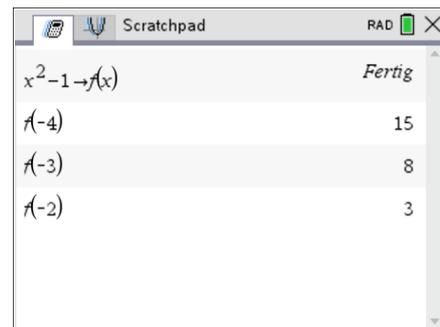
**Funktionswerte mittels Werteballe bestimmen**

- **menu** **7** **1** oder **ctrl** **T** drücken
- Eine Tabelle erscheint
- Gewünschte Funktion mit Cursortasten **◀▶** auswählen
- Gewünschte Stelle x mit Cursortasten **▲▼** auswählen und Koordinaten des Punktes ablesen

*Für negative Argumente muss man nach oben scrollen. Mit **ctrl** **T** lässt sich die Tabelle wieder ausblenden.*

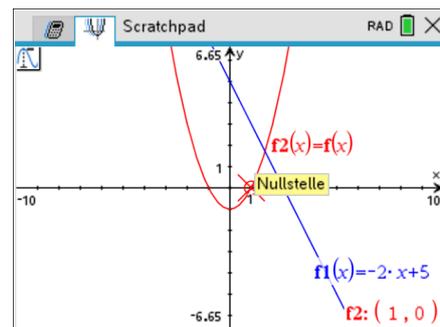
**Funktionswerte im Scratchpad berechnen**

- **ctrl** **on** **A** drücken
- Wenn noch nicht geschehen, Funktion definieren
- Funktion mit Namen und Argument aufrufen, z.B. **F** **(** **(** **)** **)**
- **enter** drücken

**Nullstellen im Spurmodus ermitteln**

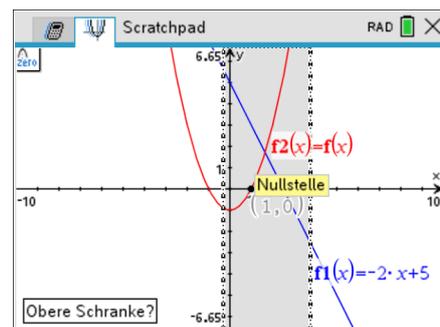
- Zu untersuchende Funktion im Grafikenfenster zeichnen
- **menu** **5** **1** für „Grafikspur“ drücken
- Mit den Cursortasten Funktion wählen und zur Nullstelle gehen bis „Nullstelle“ erscheint

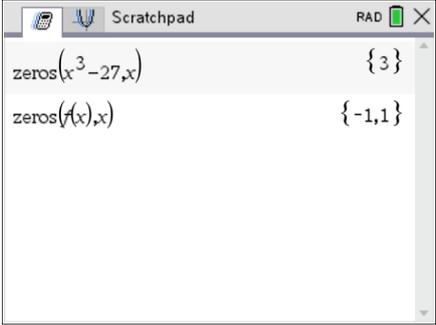
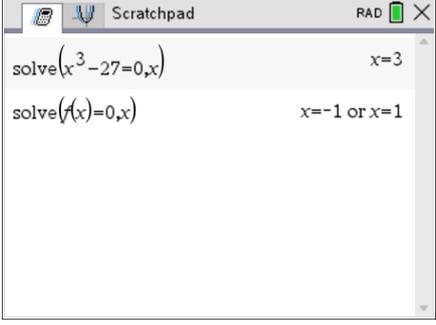
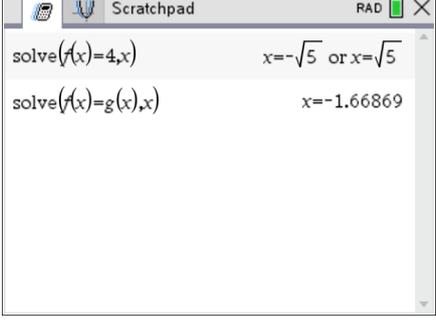
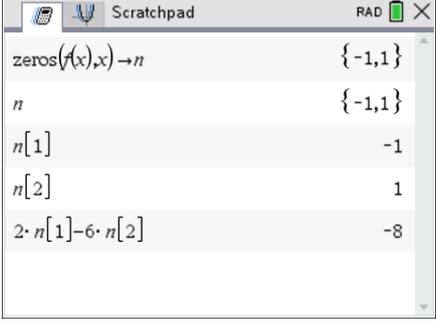
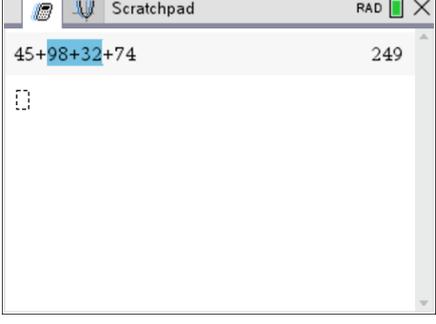
Es wird jeweils nur eine Nullstelle angezeigt. Weiter weg liegende Stellen können leicht übersehen werden.

**Nullstellen im Grafikenfenster des Scratchpad ermitteln**

- Zu untersuchende Funktion im Grafikenfenster zeichnen
- **menu** **6** **1** für „Nullstelle“ drücken
- Funktion auswählen, mit den Cursortasten die untere und obere Schranke festlegen, jeweils **ENTER** drücken

Die Wahl der Schranken entscheidet, ob und welche Nullstelle gefunden wird. Weiter weg liegende Stellen können leicht übersehen werden.



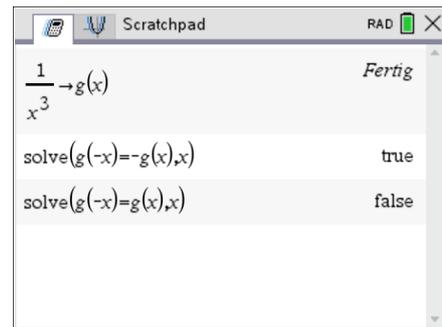
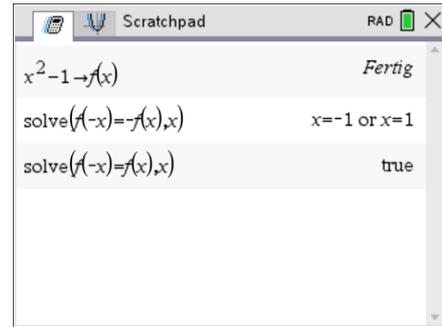
<p>Nullstellen im Scratchpad berechnen – Variante 1</p> <ul style="list-style-type: none"> • on A drücken • menu 3 4 für „Nullstellen“ drücken • In die runden Klammern von zeros() Term oder Funktionsnamen, , und Variablenamen eingeben • enter drücken <p><i>Mit diesem Verfahren werden alle Nullstellen bestimmt. Diese lassen sich speichern und weiterverarbeiten.</i></p>	
<p>Nullstellen im Scratchpad berechnen – Variante 2</p> <ul style="list-style-type: none"> • on A drücken • menu 3 1 für „Löse“ drücken • In den runden Klammern von solve() Term oder Funktionsnamen eingeben und null setzen • , und Variablenamen hinzufügen • enter drücken <p><i>Mit diesem Verfahren werden alle Nullstellen bestimmt.</i></p>	
<p>Gleichungen im Scratchpad lösen</p> <p><i>Mit dem solve()-Befehl lassen sich nicht nur Nullstellen berechnen, sondern beliebige Gleichungen lösen.</i></p> <p><i>An welchen Stellen nimmt die Funktion f(x) den Wert 4 an?</i></p> <p><i>An welchen Stellen schneiden sich die Graphen der Funktionen f(x) und g(x)?</i></p>	
<p>Nullstellen in weiteren Berechnungen nutzen</p> <p><i>Der zeros()-Befehl liefert alle Nullstellen einer Funktion als Liste. Diese Liste kann unter einem Namen gespeichert und mit ihrem Namen wieder aufgerufen werden. Auf einzelne Listenelemente greift man mit dem Listennamen und in eckigen Klammern gesetzte Indizes zu.</i></p> <p><i>So spart man z. B. das Abschreiben und erneute Eingeben der Nullstellen bei ihrer weiteren Verwendung.</i></p>	
<p>Ein- und Ausgaben in weiteren Berechnungen nutzen</p> <p><i>Alle bereits getätigten Eingaben im Scratchpad sowie die Ausgaben des Rechners können weiterverwendet werden.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Mit den Cursortasten \blacktriangleleft \blacktriangleright \blacktriangledown den zu kopierenden Wert, Term, Funktion oder sonstiges Objekt markieren oder • Teile von Werten, Termen o. ä. mit den Cursortasten \blacktriangleleft \blacktriangleright \blacktriangledown bei gedrückter Taste shift markieren • Mit ctrl C kopieren, mit ctrl V einfügen 	

Symmetriebetrachtung im Scratchpad durchführen

- **on** **A** drücken
- Wenn noch nicht geschehen, Funktion definieren
- **menu** **3** **1** für „Löse“ drücken
- Die Definition für Punkt- bzw. Achsensymmetrie eingeben, also: **F** **(** **(** **X** **)** **=** **(** **(** **F** **(** **X** **)** **)** bzw. **F** **(** **(** **X** **)** **=** **F** **(** **X** **)**
- **,** und Variablenamen hinzufügen
- **enter** drücken

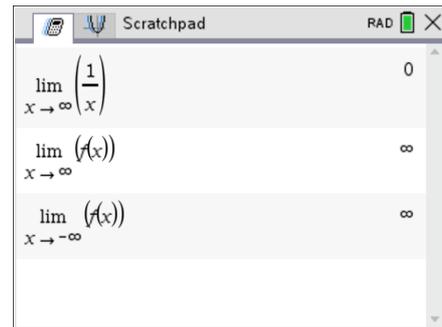
Das Ergebnis true bedeutet, dass die betrachtete Symmetrie vorliegt.

Das Ergebnis false oder irgendeine spezielle Lösung bedeut, dass die betrachtete Symmetrie nicht vorliegt.



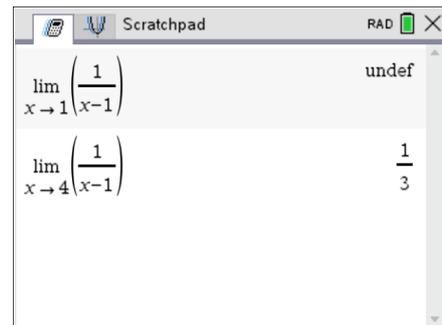
Globalverlauf im Scratchpad ermitteln

- **on** **A** drücken
- **menu** **4** **4** für „Limes“ drücken
- In die vorgesehenen Platzhalter den Term oder Funktionsnamen, den Variablenamen sowie plus oder minus unendlich (**π**) eintragen
- **enter** drücken



Grenzwert an einer Stelle a im Scratchpad berechnen

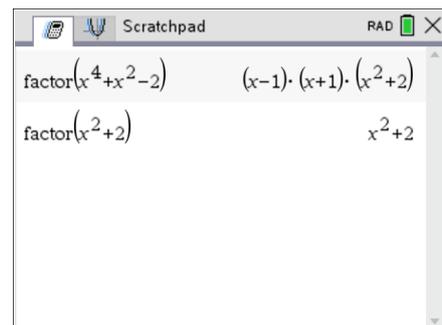
- **on** **A** drücken
- **menu** **4** **4** für „Limes“ drücken
- In die vorgesehenen Platzhalter den Term oder Funktionsnamen, den Variablenamen sowie die konkrete Stelle a eintragen
- **enter** drücken

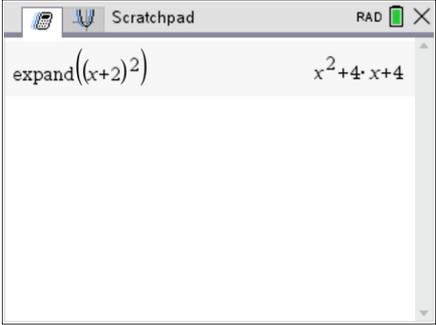
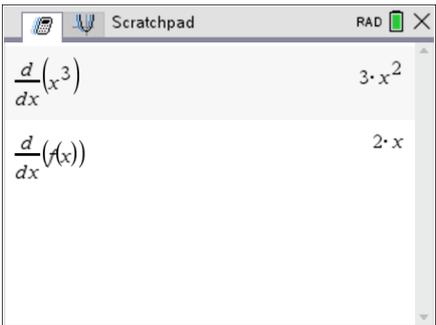
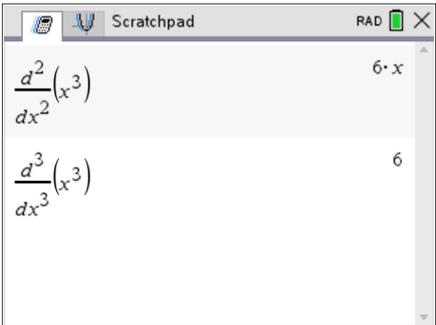
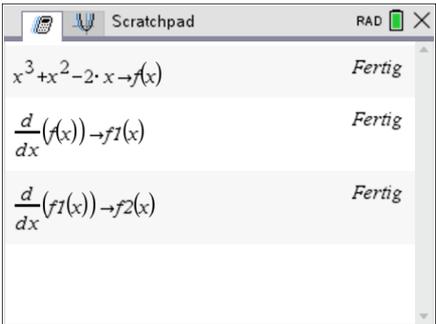
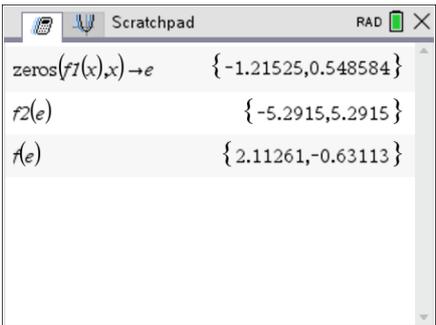


Terme faktorisieren

- **on** **A** drücken
- **menu** **3** **2** für „Faktorisieren“ drücken
- In den runden Klammern von factor() den zu faktorisierenden Term oder Funktionsnamen eingeben
- **enter** drücken

Nicht jeder Term lässt sich faktorisieren.



<p>Terme ausmultiplizieren</p> <ul style="list-style-type: none"> •  A drücken •  3 3 für „Entwickle“ drücken • In den runden Klammern von <code>expand()</code> den auszumultiplizierenden Term oder Funktionsnamen eingeben •  drücken 	
<p>Erste Ableitung im Scratchpad bestimmen</p> <ul style="list-style-type: none"> •  A drücken •  4 1 für „Ableitung“ drücken • In die vorgesehenen Platzhalter den Term oder Funktionsnamen sowie den Variablennamen eintragen •  drücken 	
<p>Höhere Ableitungen im Scratchpad bestimmen</p> <ul style="list-style-type: none"> •  A drücken •  drücken und Vorlage für die zweite oder n-te Ableitung wählen (hier gibt's auch die erste Ableitung) • In die vorgesehenen Platzhalter den Term oder Funktionsnamen sowie den Variablennamen eintragen •  drücken <p><i>Alternative: 2. Ableitung ist 1. Ableitung der 1. Ableitung.</i></p>	
<p>Relative Extrempunkte berechnen</p> <ul style="list-style-type: none"> •  A drücken • Wenn noch nicht geschehen, Funktion definieren • Erste und zweite Ableitung bilden und speichern • Die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen und speichern • Mithilfe der zweiten Ableitung oder des VZW-Kriteriums prüfen, ob die vermuteten Extremstellen tatsächlich Extremstellen sind und Art der Extrema feststellen • Funktionswerte an den Extremstellen bestimmen <p><i>Es ist zeitsparend, die Nullstellen der ersten Ableitung nicht einzeln und nacheinander zu untersuchen, sondern gleichzeitig. Dazu setzt man nicht einzelne Werte $e[1]$, $e[2]$, ..., sondern die gesamte Liste e in die zweite Ableitung bzw. Funktion ein.</i></p>	 

Wendepunkte berechnen

- $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$ drücken
- Wenn noch nicht geschehen, Funktion definieren
- Zweite und dritte Ableitung bilden und speichern
- Die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmen und speichern
- Mithilfe der dritten Ableitung oder des VZW-Kriteriums prüfen, ob die vermuteten Wendestellen tatsächlich Wendestellen sind und Art der Extrema feststellen
- Funktionswerte an den Wendestellen bestimmen

Es ist zeitsparend, die Nullstellen der zweiten Ableitung nicht einzeln und nacheinander zu untersuchen, sondern gleichzeitig. Dazu setzt man nicht einzelne Werte $w[1]$, $w[2]$, ..., sondern die gesamte Liste w in die dritte Ableitung bzw. Funktion ein.

Scratchpad RAD $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$

$$x^3 + x^2 - 2 \cdot x \rightarrow f(x) \quad \text{Fertig}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) \rightarrow f2(x) \quad \text{Fertig}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(f(x)) \rightarrow f3(x) \quad \text{Fertig}$$

Scratchpad RAD $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$

$$\text{zeros}(f2(x), x) \rightarrow w \quad \{-0.333333\}$$

$$f3(w) \quad 6$$

$$f(w) \quad \{0.740741\}$$

Polynomdivision durchführen

- $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$ drücken
- $\left[\text{menu} \right] \left[3 \right] \left[3 \right]$ für „Entwickle“ drücken
- In den runden Klammern von $\text{expand}()$ den Bruch aus Polynomen oder den Funktionsnamen eingeben
- $\left[\text{enter} \right]$ drücken

Eine Alternative zu $\text{expand}()$ ist die Funktion $\text{propFrac}()$.

Scratchpad RAD $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$

$$\text{expand}\left(\frac{-x^4 + 4 \cdot x^2}{x^2 - 2}\right) \quad \frac{4}{x^2 - 2} - x^2 + 2$$

$$\text{propFrac}\left(\frac{-x^4 + 4 \cdot x^2}{x^2 - 2}\right) \quad \frac{4}{x^2 - 2} - x^2 + 2$$

Summen mittels Summenoperator berechnen

- $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$ drücken
- $\left[\text{menu} \right] \left[4 \right] \left[5 \right]$ für „Summe“ drücken
- In die vorgesehenen Platzhalter den Term oder Funktionsnamen, den Variablennamen mit Startwert sowie den Endwert eintragen
- $\left[\text{enter} \right]$ drücken

Beispiele: Summe der ersten 100 $[n]$ natürlichen Zahlen

Scratchpad RAD $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$

$$\sum_{i=1}^{100} (i) \quad 5050$$

$$\sum_{i=1}^n (i) \quad \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Produkte mittels Produktoperator berechnen

- $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$ drücken
- $\left[\text{menu} \right] \left[4 \right] \left[6 \right]$ für „Produkt“ drücken
- In die vorgesehenen Platzhalter den Term oder Funktionsnamen, den Variablennamen mit Startwert sowie den Endwert eintragen
- $\left[\text{enter} \right]$ drücken

Beispiele: Produkt der ersten 10 $[n]$ natürlichen Zahlen

Scratchpad RAD $\left[\text{on} \right] \left[\text{A} \right]$

$$\prod_{i=1}^{10} (i) \quad 3628800$$

$$\prod_{i=1}^n (i) \quad n!$$

Untersumme, Obersumme und Integral berechnen

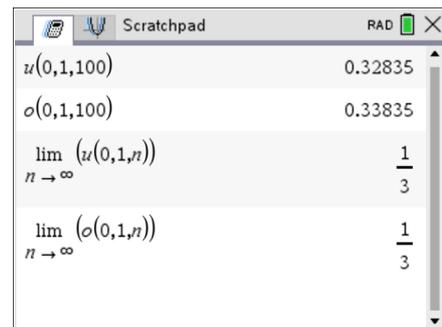
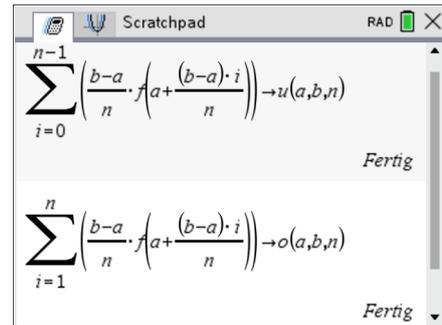
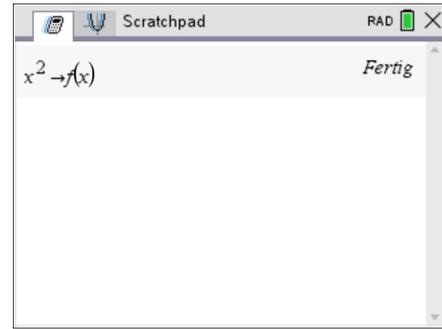
- $\left[\text{on} \right] \left[\mathbf{A} \right]$ drücken
- Wenn noch nicht geschehen, Funktion definieren
- $\left[\text{menu} \right] \left[\mathbf{4} \right] \left[\mathbf{5} \right]$ für „Summe“ drücken
- Zwischen den Klammern das Produkt aus Streifenbreite $\left[\frac{b-a}{n} \right]$ und Streifenhöhe $\left[f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right) \right]$ eingeben
- Die Laufvariable sei i , welche bei n Streifen für den linken Streifenrand von 0 bis $n - 1$ läuft
- Als Untersummenfunktion $u(a, b, n)$ speichern

Die Obersummenfunktion $o(a, b, n)$ wird entsprechend definiert. Lediglich der Startwert 1 und der Endwert n der Laufvariablen müssen angepasst werden, da hier die rechten Seitenränder der Streifen betrachtet werden.

Unter- und Obersumme können nun in Abhängigkeit von linker und rechter Intervallgrenze sowie Streifenanzahl berechnet werden.

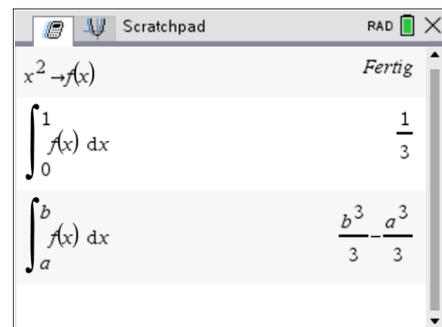
Haben Ober- und Untersumme für eine gegen unendlich strebende Streifenanzahl einen gemeinsamen Grenzwert, so heißt dieser „Integral der Funktion $f(x)$ nach dx in den Grenzen von a bis b “.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(a, b, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} o(a, b, n) = \int_a^b f(x) dx$$



Bestimmtes Integral im Scratchpad berechnen

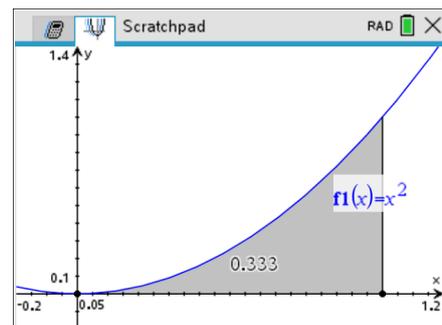
- $\left[\text{on} \right] \left[\mathbf{A} \right]$ drücken
- $\left[\text{menu} \right] \left[\mathbf{4} \right] \left[\mathbf{3} \right]$ für „Integral“ drücken
- In die vorgesehenen Platzhalter den Term oder Funktionsnamen, den Variablennamen, die untere Grenze a sowie die obere Grenze b eintragen
- $\left[\text{enter} \right]$ drücken



Bestimmtes Integral im Grafikfenster berechnen

- (Integranden-) Funktion im Grafikfenster darstellen
- $\left[\text{menu} \right] \left[\mathbf{6} \right] \left[\mathbf{7} \right]$ für „Integral“ drücken
- Graph auswählen sowie obere und untere Grenze direkt eingeben oder mit den Cursortasten festlegen
- $\left[\text{enter} \right]$ drücken

Das bestimmte Integral ist die Summe der orientierten Flächeninhalte, i.A. nicht der Flächeninhalt selbst!



Flächen im Scratchpad berechnen – Variante 1

Der Inhalt der Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse über dem Intervall $[a;b]$, zum Beispiel $[-2;3]$, lässt sich mithilfe von Integralen berechnen.

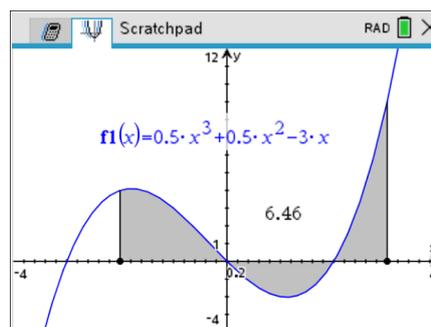
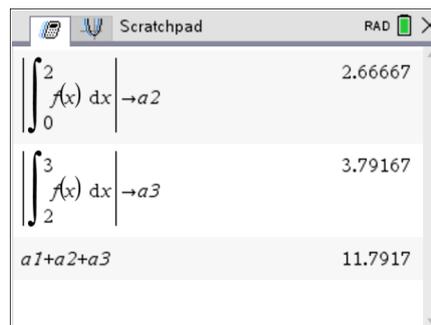
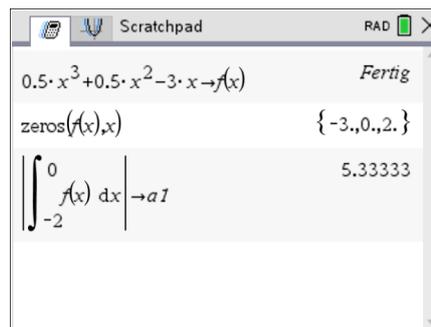
-  **A** drücken
- Wenn noch nicht geschehen, Funktion definieren
- Nullstellen mittels zeros() oder solve() berechnen
- Teilflächen durch Berechnung des Betrags des bestimmten Integrals ermitteln und speichern
- Gesamtfläche durch Addition der Teilflächen berechnen

Die Integrationsgrenzen zur Bestimmung der Teilflächen sind a und b sowie alle im Intervall $[a;b]$ liegenden Nullstellen. Hier sind das -2 , 0 , 2 und 3 . Alle nicht im Intervall $[a;b]$ liegenden Nullstellen sind irrelevant. Hier ist das -3 .

Die kleinste untere und die größte obere Integrationsgrenze müssen keine Nullstellen sein, können es aber. Das hängt von der Aufgabenstellung ab.

Bei Aufgabenstellungen, in denen z.B. steht „... wird allein von der x-Achse und dem Graphen der Funktion vollständig begrenzt...“, sind die kleinste untere und die größte obere Integrationsgrenze in der Tat Nullstellen, die man meistens auch noch selbst ermitteln muss.

Hier deutlich zu erkennen: Das bestimmte Integral im Intervall $[-2;3]$ entspricht nicht dem Flächeninhalt!



Flächen berechnen – Variante 2

Das eben beschriebene erste Verfahren zur Berechnung des Inhalts krummlinig begrenzter Flächen funktioniert sowohl mit dem TI-nspire CAS als auch per Hand, also immer. Es ist das Standardverfahren der Analysis.

CAS-Rechner sind in der Lage, den Betrag einer Funktion zu integrieren. Durch die Betragsbildung vor dem Integrieren werden die Teilflächen unterhalb der x-Achse nach oben geklappt. Sie haben nun alle eine positive Orientierung. Die Nullstellen innerhalb des betrachteten Intervalls spielen keine Rolle mehr. Das Integral des Betrags der Funktion in den gewünschten Grenzen ist gleich dem gesuchten Flächeninhalt.

Dieses Verfahren funktioniert sowohl im Rechenfenster als auch im Grafikenfenster des Scratchpad.

